《计算机辅助几何设计》作业 3

ID 号: 47　　姓名: 陈文博

2021 年 10 月 1 日

1. 编写程序实现平面 Bézier 曲线生成

要求：实现基于 Bernstein 基函数的代数方法，通过控制多边形提供 Bézier 曲线交互式编辑功能。提交相关 Matlab(或 C++) 代码与实验报告。

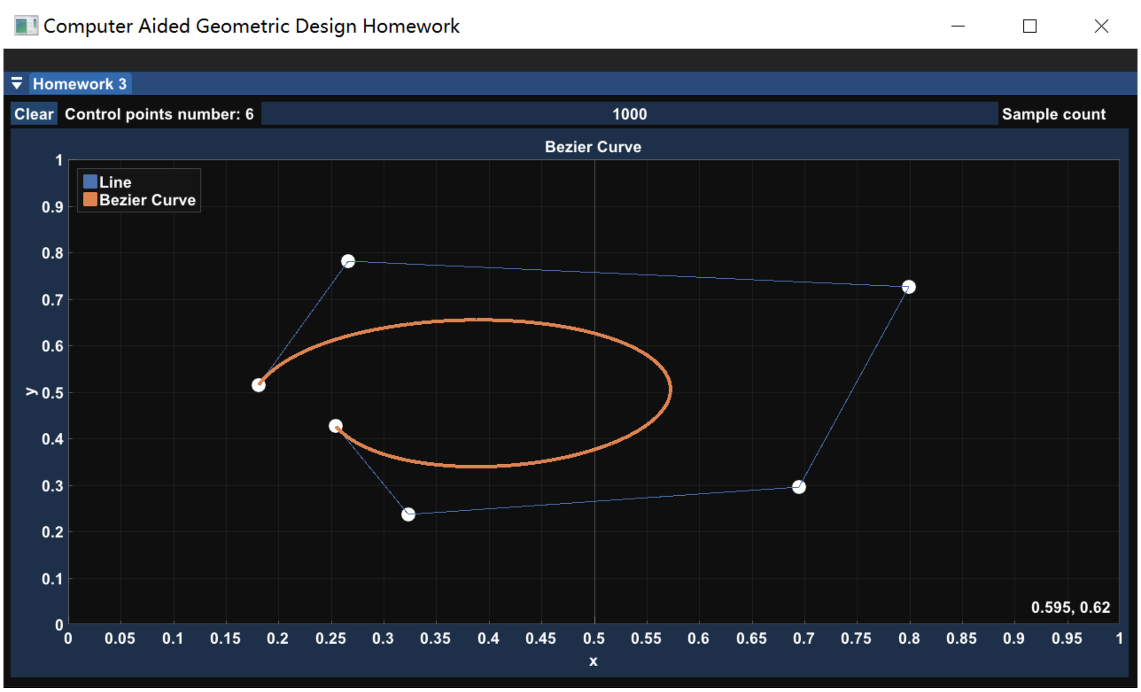

图 1: 实验结果

交互说明

- 鼠标左键 + 键盘 Ctrl 添加坐标点
- 鼠标中键拖动可移动坐标系
- 鼠标滑轮可缩放坐标系
- 鼠标左键可进行坐标点的拖拽编辑

程序说明

项目地址：*https://github.com/Chaphlagical/Chaf-Engine/tree/CAGD*

核心算法代码：*src/CAGD/HW3* 文件夹中的 *BezierCurve.h/.cpp*

其他优化：

1. 使用 OpenMP 进行并行加速
2. 使用动态规划方法求解组合数，提高计算效率

2. 证明：一条 Bézier 曲线的弧长不大于其控制多边形的周长。

设 Bézier 曲线方程为 $\boldsymbol{f}(t)$，曲线弧长为 L，多边形周长为 C，则 Bézier 曲线弧长为：

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \|\boldsymbol{f}'(t)\| \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left\| n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{(n-1)}(t)(\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i) \right\| \mathrm{d}t \\ &\leq n \sum_{i=0}^{n-1} \|\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i\| \cdot \int_0^1 B_i^{(n-1)}(t) \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{1}$$

由 Bernstein 基函数的性质，有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B_i^{(n)}(t) = n \left[B_{i-1}^{(n-1)}(t) - B_i^{(n-1)}(t) \right] \tag{2}$$

从 0 到 1 积分得：

$$B_i^{(n)}(1) - B_i^{(n)}(0) = n \left[\int_0^1 B_{i-1}^{(n-1)}(t) - \int_0^1 B_i^{(n-1)}(t) \right] = 0 \tag{3}$$

依此类推有：

$$\int_0^1 B_0^{(n-1)}(t) \mathrm{d}t = \int_0^1 B_1^{(n-1)}(t) \mathrm{d}t = \cdots = \int_0^1 B_{n-1}^{(n-1)}(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{n} \tag{4}$$

因此，

$$L \leq \sum_{i=0}^{n-1} \|\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i\| = C \tag{5}$$

故一条 Bézier 曲线的弧长不大于其控制多边形的周长结论成立

3. 证明：圆弧不能用 Bézier 曲线精确表示

设有一圆弧圆心为 $\boldsymbol{c}$，半径为 r，假设它能够用一 Bézier 曲线 $\boldsymbol{f}(t)$ 进行表示，则有:

$$\|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{c}\| \equiv r \tag{6}$$

其中,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(t) &= \sum_{i=1}^{n} B_i^{(n)}(t)\boldsymbol{p}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} \boldsymbol{p}_i\end{aligned} \tag{7}$$

又

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} \boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{c} \right\| \not\equiv \mathrm{const} \tag{8}$$

因此假设不成立，圆弧不能用 Bézier 曲线精确表示

4. 试求平面 n 次 Bézier 曲线及其控制顶点首末顶点与原点所围成的区域的面积（用控制顶点的坐标来表达）

设 Bézier 曲线方程为 $\boldsymbol{f}(t)=\sum_{i=1}^{n} B_i^{(n)}(t)\boldsymbol{p}_i$，则区域面积表示为:

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \boldsymbol{f}(t)\times \boldsymbol{f}'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{n} B_i^{(n)}(t)\boldsymbol{p}_i\right)\times\left(n\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{(n-1)}(t)(\boldsymbol{p}_{i+1}-\boldsymbol{p}_i)\right) \\
&= n\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\boldsymbol{p}_i\times(\boldsymbol{p}_{i+1}-\boldsymbol{p}_i)\int_0^1 B_i^{(n)}(t)B_j^{(n-1)}(t)\mathrm{d}t \\
&= n\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\boldsymbol{p}_i\times(\boldsymbol{p}_{i+1}-\boldsymbol{p}_i)C_n^iC_{n-1}^j\int_0^1 t^{i+j}(1-t)^{2n-1-(i+j)}\mathrm{d}t \\
&= n\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\boldsymbol{p}_i\times(\boldsymbol{p}_{i+1}-\boldsymbol{p}_i)\frac{C_n^iC_{n-1}^j}{C_{2n-1}^{i+j}}\int_0^1 C_{2n-1}^{i+j}t^{i+j}(1-t)^{2n-1-(i+j)}\mathrm{d}t \\
&= n\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\boldsymbol{p}_i\times(\boldsymbol{p}_{i+1}-\boldsymbol{p}_i)\frac{C_n^iC_{n-1}^j}{C_{2n-1}^{i+j}}\int_0^1 B_{i+j}^{(2n-1)}\mathrm{d}t \\
&= n\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\boldsymbol{p}_i\times(\boldsymbol{p}_{i+1}-\boldsymbol{p}_i)\frac{C_n^iC_{n-1}^j}{C_{2n-1}^{i+j}}\frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{C_n^iC_{n-1}^j}{C_{2n-1}^{i+j}}\boldsymbol{p}_i\times(\boldsymbol{p}_{i+1}-\boldsymbol{p}_i)
\end{aligned}
\tag{9}
$$